

วิชาคณิตศาสตร์ 6 รหัส ค33102

เรื่อง ลำดับ

ลำดับ (Sequence)

บทนิยาม ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก ที่เรียงจากน้อยไปมาก โดยเริ่มตั้งแต่ 1

ลำดับจำกัด เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรก คือ มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ ดังนั้นลำดับจำกัด คือ $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n)$

ลำดับอนันต์ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก คือ มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ดังนั้นลำดับอนันต์ คือ $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$

จากบทนิยามจะได้ $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n)$ เป็นลำดับจำกัด

$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$ เป็นลำดับอนันต์

$f(1)$	คือ	พจน์แรกของลำดับ	เขียนแทนด้วย a_1
$f(2)$	คือ	พจน์ที่ 2 ของลำดับ	เขียนแทนด้วย a_2
$f(3)$	คือ	พจน์ที่ 3 ของลำดับ	เขียนแทนด้วย a_3
\vdots			
$f(n)$	คือ	พจน์ที่ n ของลำดับ	เขียนแทนด้วย a_n
นั่นคือ	$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$		เป็นลำดับจำกัด
และ	$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$		เป็นลำดับอนันต์

จากตัวอย่างที่กล่าวมา

(1) $10, 20, 30, 40, \dots$ เป็นลำดับอนันต์ที่มี $a_1 = 10, a_2 = 20, a_3 = 30, a_4 = 40$

และ $a_n = 10n$

(2) $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ เป็นลำดับอนันต์ที่มี $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 9$

และ $a_n = 2n - 1$

(3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ เป็นลำดับจำกัดที่มี $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{1}{5}$

และ $a_n = \frac{1}{n}$

(4) $2, 4, 8, 16, \dots$ เป็นลำดับอนันต์ที่มี $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16$

และ $a_n = 2^n$

😊 รูปแบบการกำหนดลำดับ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสี่พจน์แรกของลำดับ $a_n = 5n - 2$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาสี่พจน์แรกของลำดับ $a_n = 2n + 5$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาสี่พจน์แรกของลำดับเมื่อกำหนดพจน์ทั่วไป คือ

$$(1) a_n = (-2)^n$$

$$(2) a_n = 4 + (-1)^n$$

$$(3) a_n = \frac{2n}{1+n}$$

$$(4) a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

ตัวอย่างที่ 4

จงหาพจน์ถัดไปสองพจน์ของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) 2, 6, 10, 14, ...

(2) 200, 195, 190, 185, ...

(3) 1, 4, 16, 64, ...

(4) 729, 243, 81, 27, ...

(5) $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \dots$

การหาพจน์ทั่วไปหรือพจน์ที่ n ของลำดับ (a_n)

- 1) 3,5,7,9,...
- 2) 1,6,11,16,...
- 3) -13,-10,-7,-4,...
- 4) 21,30,39,48,...
- 5) 2,3,4,5,...
- 6) 4,1,-2,-5,...
- 7) 8,3,-2,-7,...
- 8) 25,19,13,7,...
- 9) -12,16,-20,-24,...
- 10) -8,-11,-14,-17,...

การหาพจน์ทั่วไปหรือพจน์ที่ n ของลำดับ (a_n)

11) $3, 6, 12, 24, \dots$

12) $-2, 6, -18, 54, \dots$

13) $1, 3, 9, 27, \dots$

14) $-1, 3, -9, 27, \dots$

15) $1, -3, 9, -27, \dots$

16) $5, 10, 20, \dots$

17) $8, 4, 2, 1, \dots$

18) $5, \frac{15}{2}, \frac{45}{4}, \dots$

19) $\frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \dots$

การหาพจน์ทั่วไปหรือพจน์ที่ n ของลำดับ (a_n)

20. $0.1, 0.001, 0.0001, 0.00001, \dots$

21. $0.5, 0.05, 0.005, 0.0005, \dots$

22. $8, 0.8, 0.008, 0.0008, \dots$

23. $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{8}{11}, \frac{11}{15}, \dots$

24. $\frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5}{12}, \frac{7}{24}, \dots$

25. $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{9}{12}, \frac{27}{17}, \dots$

😊 การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ

การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ คือ การเขียนพจน์ทั่วไปแสดงเป็น a_n ในรูปที่มี n เป็นตัวแปร เมื่อแทน n ด้วยสมาชิกในเซต $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ แล้วได้พจน์ $1, 2, 3, \dots, m$ ของลำดับตรงตามที่กำหนด

ตัวอย่างที่ 5 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัดต่อไปนี้

(1) $5, 8, 11, 14, 17, 20$ (2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ (3) $1, 3, 9, 27$

ข้อสังเกต 1. การหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดจำนวนพจน์น้อยเกินไป อาจทำให้เราหาพจน์ทั่วไปได้ต่างกัน เนื่องจากลำดับที่ต่างกันอาจจะมีพจน์แรกๆ เหมือนกัน

2. เมื่อหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้ได้แล้ว ควรจะแทน n ใน a_n ด้วยสมาชิก $1, 2, 3, \dots$ เพื่อตรวจสอบว่า a_n ที่หาได้เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดมาให้จริงหรือไม่ โดยดูว่าพจน์ที่ได้จากการแทนค่าดังกล่าวเป็นไปตามที่กำหนดให้หรือไม่

3. การกำหนดลำดับอนันต์จะเขียนพจน์ทั่วไปกำกับไว้กับการเขียนลำดับเสมอเพื่อสื่อสารให้ทราบว่าจะกล่าวถึงลำดับใด เช่น $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ ยกเว้นในกรณีที่ระบุได้ว่าลำดับอนันต์นั้นมีความสัมพันธ์ที่เห็นชัดเจนว่าจะหาพจน์ถัดจากพจน์แรกๆ ได้อย่างไร เช่น $1, 2, 3, 4, \dots$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับอนันต์ต่อไปนี้

(1) $7, 12, 17, 22, 27, \dots$

(2) $4, 8, 12, 16, 20, \dots$

(3) $1, -1, -3, -5, -7, \dots$

(4) $3, 0, -3, -6, -9, \dots$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้

1) $2, 5, 8, 11, \dots$

2) $5, 2, -1, -4, \dots$

3) $-1, -6, -11, -16, \dots$

4) $-1, -2, -3, -4, \dots$

5) $10, 14, 18, 22, \dots$

6) $-15, -13, -11, -9, \dots$

7) $13, 6, -1, -8, \dots$

8) $3, 9, 27, 81, \dots$

9) $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ _____

10) $3, 6, 12, 24, \dots$ _____

11) $2, 6, 18, 54, \dots$ _____

12) $5, 10, 20, 40, \dots$ _____

13) $0.1, 0.01, 0.001, \dots$ _____

14) $0.3, 0.03, 0.003, \dots$ _____

15) $1, 0.2, 0.03, 0.004, \dots$ _____

16) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

$$17) \quad -\frac{2}{3}, \frac{10}{7}, \frac{50}{11}, \dots$$

$$18) \quad 4, \frac{7}{3}, \frac{10}{9}, \dots$$

$$19) \quad \frac{3}{2}, \frac{5}{11}, \frac{7}{101}, \frac{9}{1001}, \dots$$

$$20) \quad 0, -\frac{5}{3}, \frac{10}{9}, -\frac{15}{27}, \dots$$

1) $2, 5, 8, 11, \dots$

$2, -5, 8, -11, \dots$

$-2, 5, -8, 11, \dots$

8) $3, 9, 27, 81, \dots$ _____

$3, -9, 27, -81, \dots$ _____

$-3, 9, -27, 81, \dots$ _____

11) $2, 6, 18, 54, \dots$ _____

$2, -6, 18, -54, \dots$ _____

$-2, 6, -18, 54, \dots$ _____

ตัวอย่างที่ 8 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ $0, 5, 12, 21, 32, \dots$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ $-5, -7, -11, -17, \dots$

แบบฝึกหัด

1. จงเขียน 5 พจน์แรกของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$(1) \quad a_n = \frac{1}{n}$$

$$(2) \quad a_n = 2n + 3$$

$$(3) \quad a_n = 5^{n-1}$$

$$(4) \quad a_n = \frac{1}{n^{n-2}}$$

$$(5) \quad a_n = \frac{n}{5^{n-1}}$$

$$(6) \quad a_n = \frac{1}{3n} - \frac{1}{4n}$$

$$(7) \quad a_n = \frac{n^2 + 1}{3n}$$

$$(8) \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$(9) \quad a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$$

2. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัดต่อไปนี้

1 1, 8, 27, 64, 125

2 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$

3 $2, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, 4\frac{1}{4}, 5\frac{1}{5}$

4 1, 5, 9, 13, ...

5 2, 5, 10, 17, ...

6 2, 6, 12, 20, ...

7 - 1, - 4, - 7, - 10, ...

8 0.4, 0.04, 0.004, 0.0004

9 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

10 $\log 1, \log 10, \log 100, \log 1000$

11 5, 11, 17, 23, ...

12 $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{6}{3}, \frac{8}{3}, \dots$

13 $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, 9\sqrt{3}, \dots$

14 2, 9, 22, 41, 66, ...

จงหาพจน์ที่ 3 ของลำดับ a_n ซึ่ง $a_1 = 2$ และ $a_n = a_{n-1} + 3$ เมื่อ $n \geq 2$

การเขียนแสดงลำดับโดยใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิด

เมื่อกำหนดพจน์เริ่มต้นจำนวนหนึ่งพร้อมกับสูตรการหาพจน์ถัดไปจากพจน์ก่อนหน้า จะเรียกการกำหนดลำดับด้วยวิธีนี้ว่า การนิยามโดยใช้ **ความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relation)**

การเขียนแสดงลำดับโดยการบอกเงื่อนไขของลำดับหรือสมบัติของพจน์ของลำดับ
ถ้าไม่ทราบสูตรของพจน์ทั่วไปของลำดับและไม่ทราบความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับแล้ว
การกำหนดลำดับจำเป็นต้องใช้วิธีการบอกเงื่อนไขของลำดับหรือสมบัติของพจน์ของลำดับ
ตัวอย่างเช่น

พิจารณาลำดับ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

- a เป็นลำดับของจำนวนเฉพาะสิบจำนวนแรก
- a_n เป็นจำนวนเฉพาะตัวที่ n เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

แบบฝึกหัด

1. จงหาสี่พจน์แรกของลำดับต่อไปนี้
 - 1) $a_n = 2n + 5$
 - 2) $a_n = (-2)^n$
2. จงหาห้าพจน์แรกของลำดับ a_n ที่กำหนดโดยใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิดต่อไปนี้
 - 1) $a_1 = 0$ และ $a_n = a_{n-1} + n - 1$ เมื่อ $n \geq 2$
 - 2) $a_1 = 2, a_2 = 0$ และ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 3$
3. จงหาเจ็ดพจน์แรกของลำดับของจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 2 และ 7 ลงตัว โดยเรียงจากน้อยไปมาก